

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КВАЗИОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ РЕТРОСПЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–БЕНАРА*

1. Введение

Рассматривается задача о численном моделировании обратной ретроспективной задачи тепловой конвекции высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости. К числу рассматриваемых задач относится, в частности, обратная ретроспективная задача тепловой неустойчивости Рэля–Бенара. Под обратной ретроспективной задачей тепловой конвекции жидкости понимается задача о восстановлении состояния жидкости в прошлом по некоторым результатам приближенных измерений ее состояния в настоящем. Под состоянием жидкости в какой-либо момент времени обычно понимают ее скорость, давление, плотность, вязкость и температуру в этот момент времени. Для решения задачи требуется найти (аналитически или численно) решение соответствующей системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей эволюцию состояний жидкости в обратном направлении времени. Известно, что подобные задачи являются, как правило, некорректными и требуют для численного решения привлечения методов регуляризации [1–4].

Модели динамики высоковязкой жидкости получили широкое распространение в геофизике при моделировании различных процессов в недрах Земли. Подобные модели используются, например, при изучении процессов эволюции осадочных бассейнов и соляных диапиров в земной коре, тепловой конвекции в мантии Земли, движения континентов под действием мантийных течений и ряда других задач геофизики (см., например, работы [5–7] и библиографию к ним). Использование математического моделирования для анализа геолого-геофизических данных приводит к лучшему пониманию природы явлений. Применение методов теории некорректных задач для решения обратных задач в рамках рассматриваемых математических моделей является новым направлением исследований в области геодинамики. Интерес к таким задачам возрастает в связи с увеличивающейся производительностью современных ЭВМ и расширяющимся кругом приложений.

*Работа поддержана РФФИ (проект № 05-01-00098) и целевой программой по междисциплинарным проектам между УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН.

© А. И. Короткий, И. А. Цепелев, 2006

Ранее авторами для решения трехмерной ретроспективной обратной задачи тепловой конвекции был предложен вариационный метод [8]. Суть его состояла в том, что решение этой обратной задачи фактически сводилось к решению серии прямых корректных задач. Этот метод был реализован программно и использовался для решения обратной задачи реконструкции истории развития мантийных плюмов [7–9]. Численное моделирование истории развития мантийных плюмов позволило сделать ряд интересных выводов об их эволюции [10].

Исследования по сейсмической томографии мантии Земли явно указывают на наличие низкоскоростных аномалий, связанных с индивидуальными мантийными плюмами, которые протягиваются до срединемантийных глубин. Происхождение мантийных плюмов на этих глубинах является крайне проблематичным, так как нет убедительных свидетельств существования там теплового погранслоя, который мог бы быть их источником. Расчеты и численное моделирование влияния тепловой диффузии на эволюцию мантийных плюмов показывают, что плюмы, образованные на границе ядра и мантии, теряют свои ножки (вертикальные каналы поднимающегося горячего вещества) в процессе своей тепловой эволюции. Горячий мантийный материал теплового погранслоя внедряется в относительно холодную мантию и дает начало восходящим мантийным плюмам (вследствие гравитационной неустойчивости такой системы). В течение некоторого времени мантийные плюмы подпитываются из этого источника, который ослабевает со временем. При этом восхождение плюма замедляется, уменьшается конвективный теплоперенос и увеличивается кондуктивный перенос тепла от плюма к окружающей мантии. Последующая эволюция мантийных плюмов контролируется тепловой диффузией. Численные эксперименты показали, что замедление или перерыв в тепломассопереносе материала плюма (из-за истощения горячего мантийного материала теплового погранслоя) приводит к диффузионному исчезновению ножек плюмов, а затем и их шапок.

В данной работе для решения рассматриваемой обратной задачи используется метод квазиобращения [4]. Дискретные аппроксимации и алгоритмы численных расчетов соответствующих краевых задач ориентированы на применение компьютеров параллельного действия. Их использование позволяет получать более качественные результаты на мелких сетках, на которых объем вычислительной работы существенно возрастает. Для аппроксимации уравнений движения среды используется метод конечных элементов со специальным базисом из кубических сплайнов [11]. Уравнение теплового баланса аппроксимируется разностными методами [12]. В конце работы приведены некоторые результаты расчетов модельного примера.

2. Постановка задачи

Математическая модель термоконвективных течений высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости в обратном направлении времени в приближении Обербека–Буссинеска включает в себя краевую задачу для определения температурного поля [13, 14]

$$\begin{cases} \partial T / \partial t + \langle \nabla T, \mathbf{u} \rangle = \Delta T + f, & x \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T + \sigma_2 \partial T / \partial \mathbf{n} = T_b, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T(\vartheta, x) = T_\vartheta(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

и краевую задачу для определения поля скоростей и поля давлений

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mu \mathbf{e}_{ij}) = \nabla p - Ra T \mathbf{e}_3, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \partial \mathbf{u}_\tau / \partial \mathbf{n} = 0, & x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь $\Omega = (0, \ell_1) \times (0, \ell_2) \times (0, \ell_3) \subset \mathbb{R}^3$ – модельная область изменения пространственных переменных; $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ – вектор скорости движения жидкости; \mathbf{e}_3 – орт вертикальной оси Ox_3 ; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали в точках границы $\partial\Omega$ области Ω ; \mathbf{u}_τ – проекция вектора скорости на касательную плоскость в точках границы $\partial\Omega$; p – давление; μ – вязкость; $\mathbf{e}_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ – тензор скоростей деформаций; ∇ – операция взятия градиента; div – операция взятия дивергенции; Δ – оператор Лапласа; T – температура; T_ϑ – температура при $t = \vartheta$; f – плотность внутренних источников тепла; Ra – число Рэлея; σ_1 и σ_2 – некоторые достаточно гладкие неотрицательные функции на $\partial\Omega$ ($\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$). Подбирая функции σ_1 , σ_2 и T_b соответствующим образом, всегда можно смоделировать какое-либо классическое условие теплообмена на границе области Ω , в частности можно получить заданное распределение температуры или теплового потока на одном из участков границы. Символами $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ и $\Gamma_2 \subset \partial\Omega$ обозначены участки границы $\partial\Omega$ области Ω такие, что $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Таким образом, в модели допускаются два типа граничных условий для поля скоростей: на Γ_1 условие прилипания, на Γ_2 условие идеального скольжения с непроницаемостью.

Физические параметры жидкости (температура, скорость, давление, вязкость, плотность) считаются переменными, зависящими от времени и пространственных координат. Вязкость и плотность зависят от температуры. Соотношения (2.1) и (2.2) приведены в безразмерном виде. Переход к безразмерному виду модели был подробно описан в работе [11].

Ретроспективная обратная задача тепловой конвекции формулируется следующим образом: найти поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$, давление $p = p(t, x)$ и температуру $T = T(t, x)$, удовлетворяющие при $t \in [0, \vartheta]$ в области Ω краевым задачам (2.1) и (2.2). Поскольку эта задача является некорректной [1–4], требуется разработать устойчивые методы ее численного решения.

Алгоритм решения трехмерного уравнения теплового баланса в обратном направлении времени будет основываться на методе квазиобращения. Рассмотрим вспомогательную регуляризованную задачу, в которой модель течения вязкой жидкости в обратном направлении времени включает в себя регуляризованное уравнение теплового баланса [4, 12]

$$\begin{cases} \frac{\partial T_\beta}{\partial t} + \langle \nabla T_\beta, \mathbf{u}_\beta \rangle = \Delta T_\beta - \beta \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^5 T_\beta}{\partial t \partial x_i^4} + f, & x \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T_\beta + \sigma_2 \partial T_\beta / \partial \mathbf{n} = T_b, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 \partial T_\beta^2 / \partial \mathbf{n}^2 + \sigma_2 \partial T_\beta^3 / \partial \mathbf{n}^3 = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T_\beta(\vartheta, x) = T_\vartheta(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

и соответствующую краевую задачу для определения скорости и давления

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\mu_\beta \mathbf{e}_{\beta ij}) = \nabla p_\beta - Ra T_\beta \mathbf{e}_3, & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_\beta = 0, & x \in \Omega, \\ \mathbf{u}_\beta = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \langle \mathbf{u}_\beta, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad \partial \mathbf{u}_{\beta T} / \partial \mathbf{n} = 0, & x \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Регуляризация в (2.3) состоит в добавлении дополнительных слагаемых более высокого порядка дифференцирования с некоторым малым параметром регуляризации $\beta > 0$ и добавлении дополнительного граничного условия. Вспомогательная задача будет устойчивой в некотором выбранном классе корректности при $\beta > 0$ [12], поэтому для ее решения можно воспользоваться обычными численными методами. Решение вспомогательной возмущенной задачи (2.3)–(2.4) примем за приближение к решению исходной невозмущенной задачи (2.1)–(2.2). Следует отметить тот факт, что устойчивость возмущенной задачи, вообще говоря, не гарантирует сходимости ее решения при $\beta \rightarrow 0$ к решению невозмущенной задачи. Сходимость решения регуляризованной задачи (2.3)–(2.4) к решению исходной некорректной задачи (2.1)–(2.2) можно было бы попытаться установить в некоторых выбранных классах корректности. Теоретически установить факт такой сходимости довольно трудно. Альтернативный путь – проведение численного анализа, который позволит оценить реальную обусловленность предлагаемого метода численного решения задачи и сферу его применимости.

Таким образом, ретроспективная обратная задача тепловой конвекции вязкой жидкости реально будет состоять в определении поля скоростей $\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_\beta(t, x)$, давления $p_\beta = p_\beta(t, x)$ и температуры $T_\beta = T_\beta(t, x)$, удовлетворяющих при $t \in [0, \vartheta]$ в области Ω краевым задачам (2.3) и (2.4).

Опишем алгоритм численного решения рассматриваемой обратной задачи и исследуем зависимость построенного решения от параметра регуляризации.

3. Численный метод решения задачи

В параллелепипеде $\bar{\Omega}$ введем равномерную прямоугольную сетку с узлами

$$\omega_{ijk} = (x_1^i, x_2^j, x_3^k) : \quad 0 = x_m^0 < x_m^1 < \dots < x_m^{n_m-1} < x_m^{n_m} = \ell_m, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$0 \leq i \leq n_1, \quad 0 \leq j \leq n_2, \quad 0 \leq k \leq n_3.$$

Введем также равномерную сетку на отрезке $[0, \vartheta]$ с узлами $t_n = \vartheta - n\tau$, $n = 0, \dots, N$, где τ – шаг разбиения; $\vartheta = N\tau$. Символом T_{ijk}^n будем обозначать значение соответствующей сеточной функции в узле сетки $\omega_{ijk} \in \bar{\Omega}$ в момент времени $t_n \in [0, \vartheta]$.

Алгоритмы численного решения уравнений теплового баланса в данной работе основываются на аддитивном расщеплении трехмерных дифференциальных операторов на одномерные операторы по каждому из трех направлений. Аппроксимацию диффузионного члена в уравнении (2.3) проведем центральными разностями $\partial^2/\partial x_i^2 \approx \Delta_i$; аппроксимацию стабилизирующего члена также проведем центральными разностями $\partial^4/\partial x_i^4 \approx \Theta_i$; аппроксимацию конвективных слагаемых проведем, используя нелинейную монотонную TVD схему [15], которая формально имеет третий порядок точности по пространственной переменной, $u_\beta^i \partial/\partial x_i \approx \Xi_i$, $i = 1, 2, 3$. Для расчета сеточного решения воспользуемся двухслойной аддитивно-усредненной схемой [12]

$$\frac{T_{ijk}^* - T_{ijk}^n}{3\tau} + \beta \frac{\Theta_1(T_{ijk}^* - T_{ijk}^n)}{3\tau} = \Xi_1 T_{ijk}^n - \Delta_1 T_{ijk}^n, \quad (3.1)$$

$$\frac{T_{ijk}^{**} - T_{ijk}^n}{3\tau} + \beta \frac{\Theta_2(T_{ijk}^{**} - T_{ijk}^n)}{3\tau} = \Xi_2 T_{ijk}^n - \Delta_2 T_{ijk}^n - f_{ijk}^n, \quad (3.2)$$

$$\frac{T_{ijk}^{***} - T_{ijk}^n}{3\tau} + \beta \frac{\Theta_3(T_{ijk}^{***} - T_{ijk}^n)}{3\tau} = \Xi_3 T_{ijk}^n - \Delta_3 T_{ijk}^n, \quad (3.3)$$

$$T^{n+1} = (T^* + T^{**} + T^{***})/3.$$

Учитывая независимый характер уравнений (3.1)–(3.3), для их решения можно использовать многопроцессорные вычислительные машины и решать

соответствующие системы методом пятидиагональной прогонки. Дифференциальные операторы аппроксимируются вблизи границы с учетом граничных условий. Сами граничные условия аппроксимируются с использованием центральных разностей.

В данной работе не будет обсуждаться конкретный способ решения задачи (2.2) или (2.4). Отметим лишь, что этот способ базируется на представлении поля скоростей в виде двухкомпонентного векторного потенциала, что приводит к исключению уравнения несжимаемости из соответствующих краевых задач. Этот потенциал аппроксимируется трикубическими сплайнами, что позволяет эффективно решить задачу интерполяции поля скоростей. При расчете поля скоростей давление можно исключить из рассмотрения, выполнив операцию вихря над первыми равенствами в краевых задачах (2.2) и (2.4). После нахождения поля скоростей давление можно определить из этих же уравнений (2.2) или (2.4). Подробное описание такого подхода и соответствующих алгоритмов численных расчетов, ориентированных на применение ЭВМ параллельного действия, можно найти в работах [8, 11].

Выбор оптимального параметра регуляризации β_* можно организовать методом невязки, решая экстремальную задачу

$$\beta_* \in \arg \max \{ \delta - \|T(\vartheta, \cdot; T_k(0, \cdot)) - \varphi(\cdot)\|_{L_2(\Omega)} : \beta_k \in B \}, \quad (3.4)$$

$$B = \{ \beta_k = \beta_0 q^k : k = 0, 1, \dots, M \}, \quad \beta_0 > 0, \quad 0 < q < 1, \quad M \in \mathbb{N},$$

где $T_k = T_{\beta_k}(\cdot, \cdot)$ – решение задачи (2.3); $T = T(\cdot, \cdot; T_k(0, \cdot))$ – решение прямой задачи

$$\begin{cases} \partial T / \partial t + \langle \nabla T, \mathbf{u} \rangle = \Delta T + f, & x \in \Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ \sigma_1 T + \sigma_2 \partial T / \partial \mathbf{n} = T_b, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, \vartheta], \\ T(0, x) = T_k(0, x), & x \in \Omega; \end{cases} \quad (3.5)$$

φ – заданная (наблюдаемая) температура в момент времени $t = \vartheta$; δ – заданный уровень погрешности решения задачи; β_0, q, M – параметры метода невязки выбора параметра регуляризации. При q , близких к единице, существенно возрастает объем вычислительной работы; при q , близких к нулю, можно пропустить оптимальное решение.

Иной путь определения параметра регуляризации, который напрямую не связан с использованием уровня погрешности δ , состоит в следующем. Для нахождения приемлемого значения β_* минимизируется норма разности соседних приближений

$$\beta_* \in \arg \max \{ \|T_{\beta_{k+1}}(0, \cdot) - T_{\beta_k}(0, \cdot)\|_{L_2(\Omega)} : \beta_k \in B \}. \quad (3.6)$$

На практике определение параметра регуляризации зависит от конкретной задачи и носит эмпирический характер, при этом может быть использована какая-либо априорная информация о задаче и ее решении. Для реализации метода невязки (3.4) необходимо не только решать обратную задачу на всем промежутке времени, но и решать прямую задачу на этом же промежутке времени. Это увеличивает объем вычислительной работы по крайней мере в два раза. Способ (3.6) менее затратен и не базируется на знании априорной информации.

4. Алгоритм решения задачи

Сначала зададим некоторое равномерное разбиение оси времени точками $t_n^* = \vartheta - \tau_* n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\tau_* = \vartheta/m$ – шаг разбиения; $m \in \mathbb{N}$. Это разбиение может не совпадать с разбиением, используемым для дискретизации краевой задачи (2.3). При расчетах удобнее использовать разностную сетку, вложенную в сетку алгоритма решения обратной задачи ($\tau_* = \tau P$, $P \in \mathbb{N}$).

Затем для каждого значения параметра регуляризации β_k , $k = 0, \dots, M$, организуется итерационный процесс по $n = 0, \dots, m$, в котором последовательно выполняются следующие действия. По распределению температуры $T_\beta = T_{\beta_k}^n = T_{\beta_k}(t_n^*, \cdot)$ ($T_{\beta_k}^0 = T_\vartheta(\cdot)$) из (2.4) находится распределение поля скоростей $\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_{\beta_k}^n = \mathbf{u}_{\beta_k}(t_n^*, \cdot)$. Найденное поле скоростей полагается постоянным на промежутке $(t_{n+1}^*, t_n^*]$. Далее, на отрезке $[t_{n+1}^*, t_n^*]$ из (2.3) с финальным условием $T_\beta(t_n^*, \cdot) = T_{\beta_k}^n(\cdot)$ вычисляется новое распределение температуры $T_{\beta_k}^{n+1} = T_{\beta_k}(t_{n+1}^*, \cdot)$. После выполнения итерационного процесса будут получены распределения поля скоростей и поля температур в дискретные моменты времени, соответствующие точкам t_n^* , $n = 0, \dots, m$. Описанная последовательность действий может быть наглядно отражена в следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_\beta(t_m^*, \cdot) & \longleftarrow & T_\beta(t_{m-1}^*, \cdot) & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & T_\beta(t_1^*, \cdot) & \longleftarrow & T_\vartheta(\cdot) \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{u}_\beta(t_m^*, \cdot) & \nwarrow & \mathbf{u}_\beta(t_{m-1}^*, \cdot) & \nwarrow & \dots & \nwarrow & \mathbf{u}_\beta(t_1^*, \cdot) & \nwarrow & \mathbf{u}_\beta(\vartheta, \cdot)
 \end{array}$$

Интерполяция полученных дискретных распределений температур и скоростей даст приближенную непрерывную картину этих распределений на отрезке времени $[0, \vartheta]$ в области Ω .

Далее осуществляется выбор параметра регуляризации. Если выбор оптимального значения параметра регуляризации осуществляется по правилу невязки (3.4), то находятся решения прямых задач $T = T(\cdot, \cdot; T_{\beta_k}(0, \cdot))$ из (3.5) при $k = 0, \dots, M$ и вычисляется оптимальное значение параметра регуляризации β_* из условия (3.4). Если выбор оптимального значения параметра

регуляризации осуществляется по принципу (3.6), то вычисляется оптимальное значение параметра регуляризации β_* из условия (3.6).

Наконец, в качестве решения обратной задачи принимаются распределение поля скоростей $\mathbf{u}_{\beta_*}(t_n^*, \cdot)$ и распределение поля температур $T_{\beta_*}(t_n^*, \cdot)$ при $n = 0, \dots, m$. Давление $p_{\beta_*}(t_n^*, \cdot)$, $n = 0, \dots, m$, определяется из (2.4).

5. Расчет модельного примера

Проведем вычислительный эксперимент, полагая $\bar{\Omega} = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 1]$. На грани $\Gamma(x_3 = \ell_3)$ считаем $T(t, x) \equiv 0$, на грани $\Gamma(x_3 = 0)$ пусть $T(t, x) \equiv 1$, на боковых гранях $\bar{\Omega}$ задается условие теплоизолированности $\partial T / \partial \mathbf{n} = 0$. В задаче Стокса (2.2) ограничимся случаем граничных условий идеального скольжения с непроницаемостью. Полагаем $f \equiv 0$, $\text{Ra} = 9.5 \times 10^5$, $\vartheta = 0.0015$. Зависимость вязкости от температуры задавалась следующим выражением: $\mu(t, x; T) = \exp(Q/(T + G) - Q/(0.5 + G))$, $Q = 255/\ln(r) - 0.25/\ln(r)$, $G = 15/\ln(r) - 0.5$, $r = 20$. Зависимость плотности от температуры задавалась соотношением $\rho(t, x; T) = 1 - \alpha(T - 1)$, где α – коэффициент объемного расширения (входит в число Ra).

В начальный момент времени $t = t_0 = 0$ для уравнения теплового баланса (3.5) задается начальная температура $T_0 = T_0(\cdot)$ (рис. 1). Решив задачу (2.2), (3.5) с указанными данными в прямом направлении времени, получим финальное состояние температуры $T_\vartheta = T_\vartheta(\cdot)$, из которого будет решаться обратная задача (2.3)–(2.4).

Векторный потенциал скорости аппроксимировался $38 \times 38 \times 30$ трикубическими элементами, для аппроксимации вязкости и температуры использовалась сетка из $112 \times 112 \times 90$ узлов. Для расчета обратной задачи привлекалось 36 процессоров Alpha 21264A (667МГц, Fast Gigabit Ethernet). Расчет одного шага по времени занимал менее минуты, для восстановления искомого состояния делалось 180 шагов по времени (при расчете прямой задачи также делалось 180 шагов). Множество B строилось при $\beta_0 = 10^{-4}$, $q = 0.1$, $M = 14$.

В левом столбце рис. 1 показана эволюция жидкости в прямом времени. На кадрах изображены изотермы $T = 0.9$, соответствующие моментам безразмерного времени $t_0 = 0$, $t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.0015 = \vartheta$. В правом столбце изображены изотермы $T = 0.9$, соответствующие тем же моментам времени, при решении обратной задачи. Для проверки качества работы алгоритма состояние решения обратной задачи $T_\beta^* = T_\beta(0, \cdot; T_\vartheta)$, взятое в момент времени $t = t_0$, принималось за начальное состояние при моделировании решения прямой задачи и выполнялся расчет задачи (2.2), (3.5) в прямом направлении времени. Результаты этого моделирования представлены на нижнем кадре рис. 1. Демонстрация показана для параметра регуляризации $\beta = 10^{-5}$.

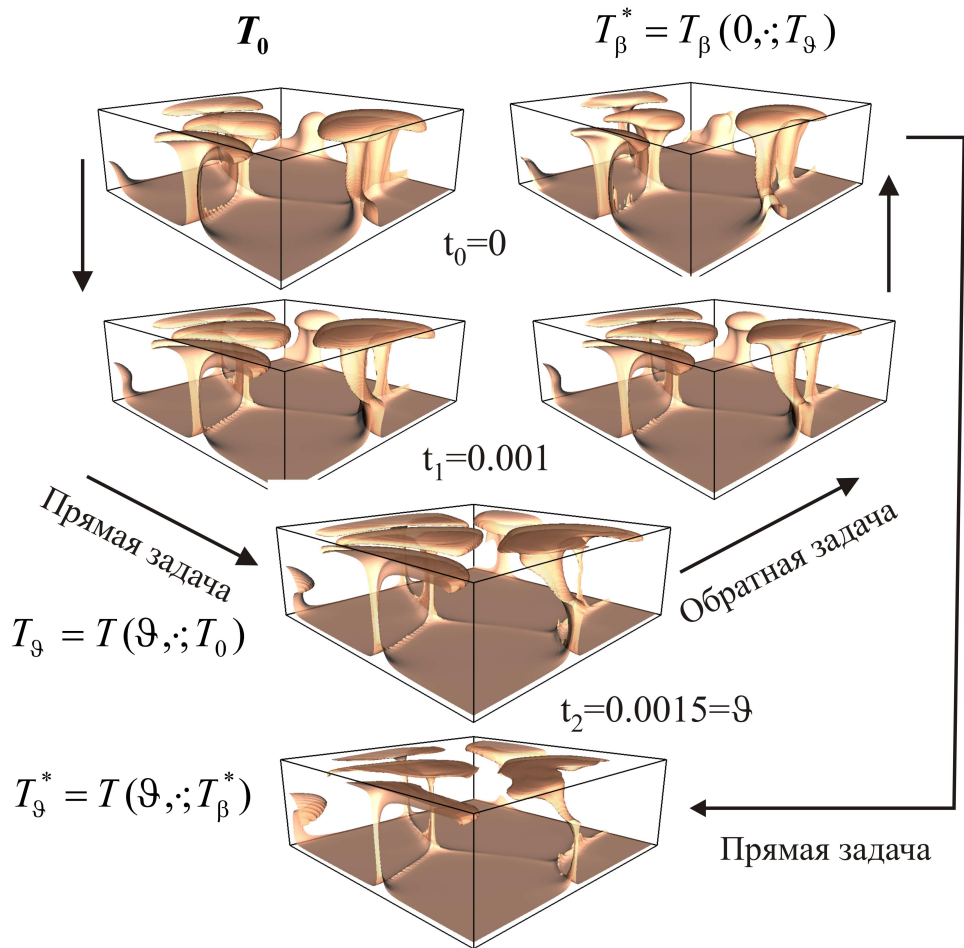


Рис. 1

На рис. 2 приведена невязка $J_1(\beta) = \|T_0 - T_\beta(0, \cdot; T_\theta)\|_{L_2(\Omega)}$ между распределением температуры в момент времени $t = 0$ и распределением температуры, полученным при решении обратной задачи из состояния $T_\theta = T_\theta(\cdot)$. Эти результаты демонстрируют зависимость решения обратной задачи от параметра регуляризации и указывают на необходимость выбора оптимального значения этого параметра из диапазона $5 \cdot 10^{-10} \leq \beta_* \leq 10^{-9}$ для достижения наиболее приемлемого результата при выбранном способе решения дискретных задач.

На рис. 3 приведена невязка $J_2(\beta) = \|T_\beta(0, \cdot; T_\theta) - T_{\beta'}(0, \cdot; T_\theta)\|_{L_2(\Omega)}$ между результатами восстановления искомого распределения температуры T_0 для

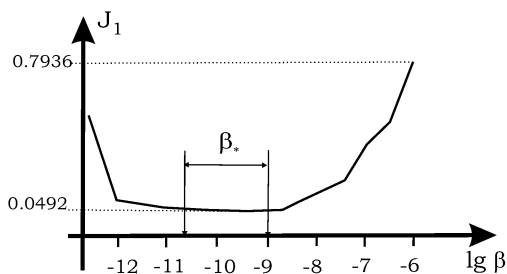


Рис. 2

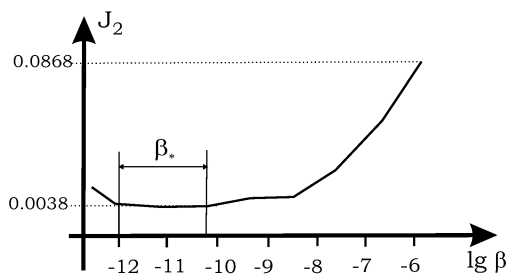


Рис. 3

значений параметров регуляризации из диапазона $10^{-13} \leq \beta \leq 5 \cdot 10^{-6}$ и $\beta' = \beta/2$. Данные результаты демонстрируют выбор оптимального значения β_* параметра β в соответствии с критерием (3.6). Для достижения наиболее приемлемого результата при выбранном способе решения дискретных задач параметр β_* следует выбирать из диапазона $5 \cdot 10^{-12} \leq \beta_* \leq 10^{-10}$. Заметим, что данный способ оценки выбора параметра регуляризации носит эмпирический характер и, вообще говоря, должен подкрепляться какой-либо дополнительной априорной информацией о модели и задаче.

6. Заключение

На основе идеи квазиобращения предложен устойчивый к вычислительным ошибкам и погрешностям задания исходных данных метод решения ретроспективной обратной задачи, позволяющий восстанавливать состояния рассматриваемой жидкости в прошлом по ее известному состоянию в настоящем. Проведены численные расчеты характерного примера обратной задач тепловой конвекции в трехмерном пространстве. Проведена оценка эффективности построенных численных методов на основе анализа некоторых подходящих функционалов невязок. Сравнивая вариационный метод решения задачи и метод квазиобращения, можно отметить, что в случае восстановления гладких данных градиентный метод дает более точное решение; в случае восстановления негладких данных и данных с разрывом оба метода дают схожие результаты, но при этом градиентный метод сходится медленно. Метод квазиобращения менее требователен к вычислительным ресурсам.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

2. ИВАНОВ В. К., ВАСИН В. В., ТАНАНА В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М. М., РОМАНОВ В. Г., ШИШАТСКИЙ С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.
4. ЛАТТЕС Р., ЛИОНС Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
5. MCKENZIE D. P., ROBERTS J. M., WEISS N. O. Convection in the Earth's mantle: towards a numerical simulation // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 62. P. 465–538.
6. SCHUBERT G., TURCOTTE D., OLSON P. Mantle Convection in the Earth and Planets. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
7. ISMAIL-ZADEN A., SCHUBERT G., TSEPELEV I. ET AL. Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2004. Vol. 145. P. 99–114.
8. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Трехмерное численное моделирование обратной задачи тепловой конвекции // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43, № 4. С. 617–630.
9. ISMAIL-ZADEN A., SCHUBERT G., TSEPELEV I. ET AL. Three-dimensional forward and backward numerical modeling of mantle plume evolution: Effects of thermal diffusion // J. Geophysical Research. 2006. Vol. 111, № B6 (B06401, doi:10.1029/2005JB003782).
10. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., КРУПСКИЙ Д. П. и др. Эволюция тепловых плюмов в мантии Земли // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 4. С. 523–526.
11. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // ЖВМиМФ. 2001. Т. 41, № 9. С. 1399–1415.
12. САМАРСКИЙ А. А., ВАВИЩЕВИЧ П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2002.
13. ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
14. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
15. САМАРСКИЙ А. А., ВАВИЩЕВИЧ П. Н. Нелинейные монотонные схемы для уравнения переноса // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 1. С. 21–23.